UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS I

APUNTE TEÓRICO

CARRERAS DE: **LICENCIATURA EN SISTEMA DE INFORMACIÓN**
PROFESORADO EN INFORMATICA:

CONTENIDOS:

UNIDAD II: LÍMITE Y CONTINUIDAD

II - 1 Límite Funcional:

Límite de una función escalar en un punto. Límite Finito. Propiedades del Límite Finito. Operaciones con límites finitos. Límites Laterales. Límite Infinito. Límite de una Función escalar en más y menos infinito. Asíntotas.

II – 2 Funciones Continuas:

Continuidad de una función escalar en un punto. Propiedades de las funciones continúas en un punto. Continuidad en un conjunto. Propiedad de las Funciones Continuas en un intervalo.

EQUIPO CÁTEDRA:

- **Lic. María M. Simonetti de Velázquez**
- **Ing. Pablo Saracho**
- **Lic. Lidia de Pablo**
- **Prof. Diego Coria**
- **Prof. Ariana Origuela**

AÑO: 2021

LIMITE FUNCIONAL

El concepto más importante del Análisis Matemático es el de **LÍMITE** y constituye un instrumento básico. Son importantes y variadas las aplicaciones del concepto límite, solo mediante él es posible dar una definición rigurosa de muchas magnitudes físicas y geométricas.

Cuando estudiamos funciones escalares tratamos de estudiar y representar cuantitativamente el cambio que una magnitud determinada por ejemplo, la altura de un árbol, experimenta cuando otra varía; por ejemplo, el diámetro del árbol.

El concepto de límite funcional aporta al estudio del comportamiento de estas funciones, razón por la cual será objeto de nuestro estudio.

El descubrimiento del concepto de límite fue uno de los mayores descubrimientos en la historia de las matemáticas y se constituyó en un concepto clave del Análisis matemático, al extremo que aparece en casi todas las definiciones importantes del mismo.

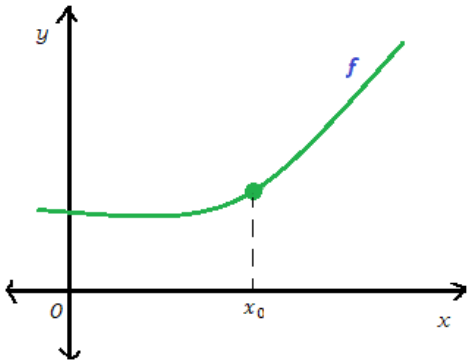
La noción de límite de una función en un punto informa sobre el comportamiento de dicha función en proximidades de dicho punto.

Veamos en qué condiciones los valores de una función escalar se aproximan a un valor determinado cuando los valores del dominio se aproximan a un punto determinado x_0, que puede pertenecer o no a dicho dominio.

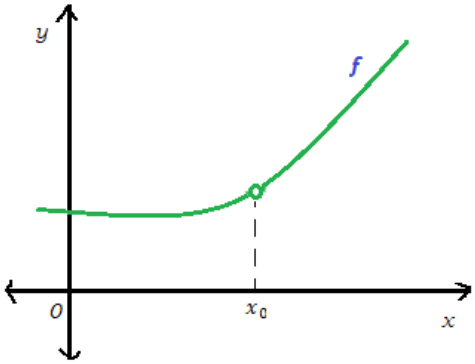
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Consideremos:

- Sea f una función escalar, con $d[f] \subseteq R$.
- Sea $\boldsymbol{x_0}$ un punto que puede o no pertenecer al $d[f]$.
- El $d[f]$ tiene al menos un punto en común con el Entorno reducido con centro en $\boldsymbol{x_0}$ y de radio delta (δ): $E^*(x_0;\delta)$,es decir $d[f] \cap E^*(x_0) \neq \emptyset$. Esta condición garantiza la existencia de una infinidad de puntos del dominio en las proximidades de x_0.



$x_0 \in d[f]$



$x_0 \notin d[f]$

Intuitivamente el numero **L** es el "**limite** de f en $\boldsymbol{x_0}$ si para todos los puntos del $d[f]$ distintos de $\boldsymbol{x_0}$ pero suficientemente próximo a este, los valores correspondientes de f son próximos a L.

DEFINICIÓN: Un **número L** es **el límite de la función f en x_0 si y sólo si**, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in d[f] \cap E^*(x_0;\delta)$ entonces $f(x) \in E(L;\varepsilon)$.

En símbolos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in d[f] \cap E^*(x_0;\delta) \Rightarrow f(x) \in E(L;\varepsilon)]$$

Esta definición es equivalente a la que sigue utilizando el concepto de distancia:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in d[f] \wedge 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), L) < \varepsilon]$$

O bien, en términos de valor absoluto:

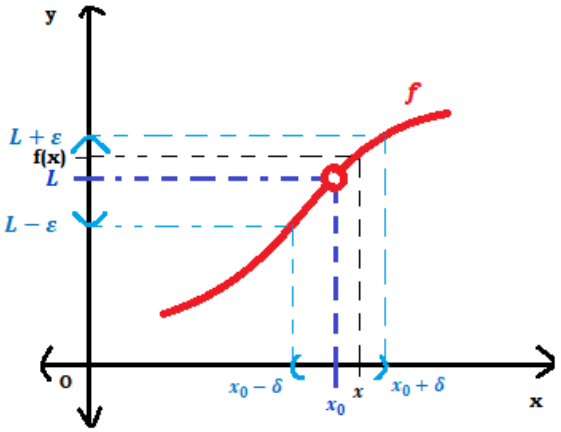
Se dice que **un número L es el límite de la función f en x_0 sii:**

$$[\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0} / \forall \boldsymbol{x}: (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{d}[\boldsymbol{f}] \wedge \mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta} \Rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}| < \boldsymbol{\varepsilon})]$$

Nota:

- ε (*epsilon*) representa un número pequeño y positivo, y es el radio del entorno con centro en L.
- δ (*delta*) representa un número pequeño y positivo, y es el radio del entorno reducido con centro en x_0.

Gráfico:



Interpretación Geométrica:

Un número L es límite de f en x_0 si para todos los puntos del $d[f] \neq x_0$ pero suficientemente próximo a este los valores correspondientes a f son próximos a L

UNICIDAD DEL LÍMITE FINITO EN UN PUNTO

Si dos números reales L_1 Y L_2 son límite de la misma función en x_0, entonces $L_1 = L_2 = L$.

Para indicar que L es el límite finito de f en x_0, se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ó $\lim\limits_{x_0} f = L$.

Si *f(x)* se acerca cuanto queramos a un único número L, cuando x tiende (se aproxima) por derecha y por izquierda a x_0, decimos que el límite de la función f cuando x tiende a x_0 es L. En símbolos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

- La frase "*f(x)* se acerca cuanto queramos a L" significa que *f(x)* se encuentra en el intervalo: $(\boldsymbol{L-\varepsilon};\ \boldsymbol{L+\varepsilon})$. Esto equivale a:

- $f(x) \in (L-\varepsilon; L+\varepsilon)$
- $f(x) \in E(L;\varepsilon)$
- $d(f(x), L) < \varepsilon$
- $|f(x) - L| < \varepsilon$

<u>Nota:</u> Las expresiones anteriores son equivalentes

- La frase "x tiende a x_0" significa que x se encuentra a la derecha de x_0 (en el intervalo $(x_0; x_0+\delta)$) o se encuentra a la izquierda de x_0 (en el intervalo $(x_0-\delta; x_0)$), salvo quizás en x_0. Simbólicamente los siguientes conjuntos son iguales:

$$(x_0-\delta; x_0) \cup (x_0; x_0+\delta) = E^*(x_0;\delta) = \{x/0 < d(x, x_0) < \delta\} = \{x/0 < |x - x_0| < \delta\}$$

<u>Veamos un ejemplo</u>: Sea las función definida como:

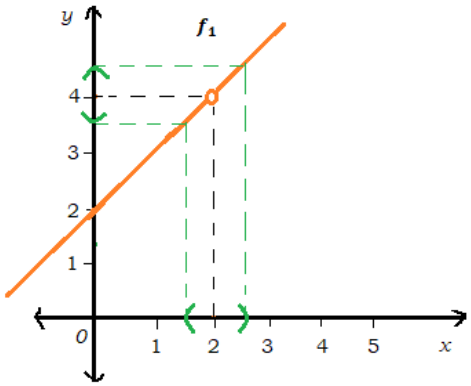
a) f_1 tal que $f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2} =$ $\boldsymbol{d[f_1] = R - \{2\}}$ si la trabajamos algebraicamente se tiene

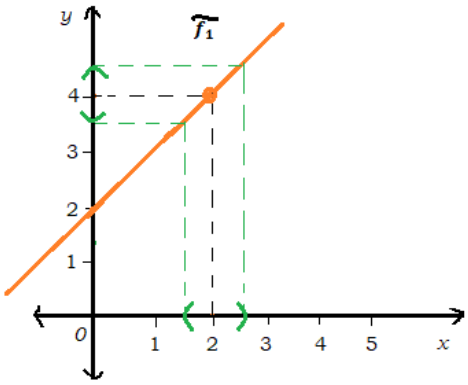
$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)\,.\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = x+2$$

Y definimos:

$$\boldsymbol{\widetilde{f_1} : x \to x+2 \quad si\ d[\widetilde{f_1}] = R}$$

Luego $\boldsymbol{f_1}$ **y** $\boldsymbol{\widetilde{f_1}}$ **no son iguales.** En efecto





Podemos observar que, en ambos casos (tanto en $\boldsymbol{f_1}$ como $\widetilde{\boldsymbol{f_1}}$) los valores de $\boldsymbol{f_1}$ y $\widetilde{\boldsymbol{f_1}}$ son próximos a 4, cuanto más próximos estemos a 2, por derecha y por izquierda.

LÍMITES LATERALES FINITOS

- Se dice que el número L_1 es el límite de f en x_0 por derecha si y sólo si:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1 \Leftrightarrow [\,\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (x \in d[f] \wedge x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow$$

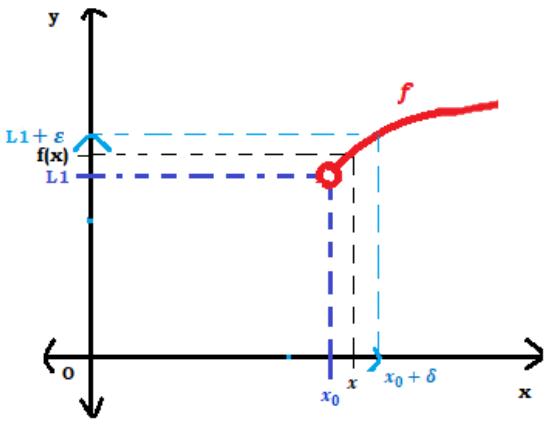
$$\Rightarrow\ |f(x) - L_1| < \varepsilon)]$$

En términos se entornos se define como:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1 \Leftrightarrow [\,\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (\in d[f] \cap E^*(x_0; \delta)\ \cap (x_0, +\infty)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x) \in E(L, \varepsilon)]$$

Gráficamente:



- Se dice que el número L_2 es el límite de f en x_0 por izquierda si y sólo si:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2 \Leftrightarrow [\,\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (x \in d[f] \wedge x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow$$

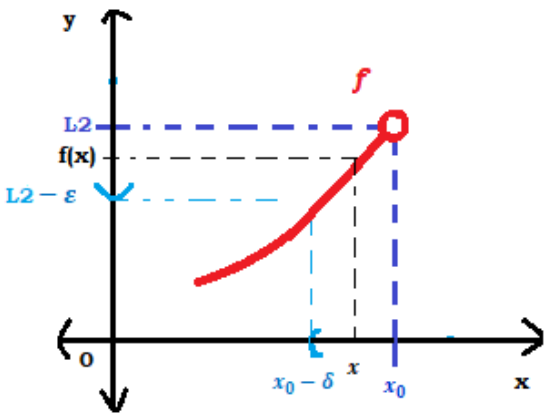
$$\Rightarrow\ |f(x) - L_2| < \varepsilon)]$$

En términos se entornos se define como:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2 \Leftrightarrow [\,\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (x \in d[f] \cap E^*(x_0; \delta) \cap (-\infty, x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)]$$

Gráficamente:



Teorema: UNICIDAD DE LOS LIMITES LATERALES

Si dos número reales L_1 y L_2 son límites de la misma función f en x_0 por derecha (por izquierda) entonces $L_1 = L_2$

Propiedad: Si existen límites laterales $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y son iguales a un único número L, entonces decimos que existe el límite y

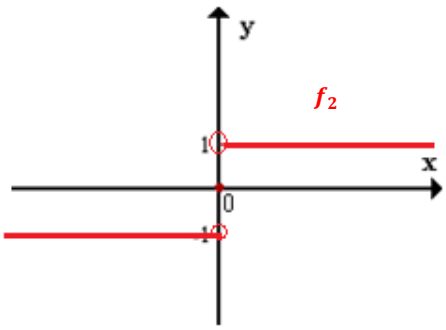
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

LÍMITES FINITO EN UN PUNTO

Ejemplo: a) Sea la ***función signo***: $\boldsymbol{f_2: x \to Sg(x) = \frac{|x|}{x}}$

donde $\boldsymbol{d[f_2] = R - \{0\}}$ y:

- Si $x > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f_2(x) = \frac{x}{x} = 1}$
- Si $x < 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f_2(x) = -\frac{x}{x} = -1}$



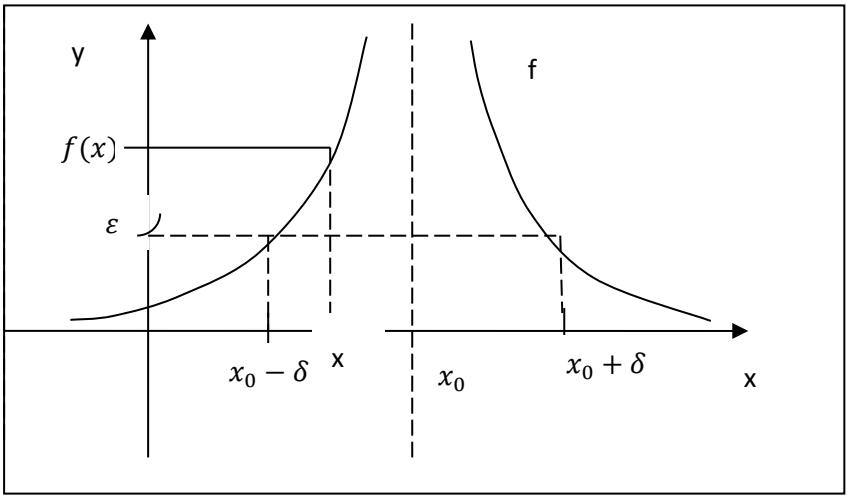
Cuando x se aproxima a cero por derecha ($x \to 0^+$), los valores de f son iguales a 1. Cuando x se aproxima a cero por izquierda ($x \to 0^-$), los valores de f son iguales a -1.

Como los limites laterales son distintos, luego la función no tiene límite finito en $x_0 = 0$

LÍMITE INFINITO EN UN PUNTO

(1) Se dice que f tiene límite $+\infty$ en x_0 y se denota $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si:

$$[\,\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (x \in d[f] \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \; f(x) > \varepsilon)$$



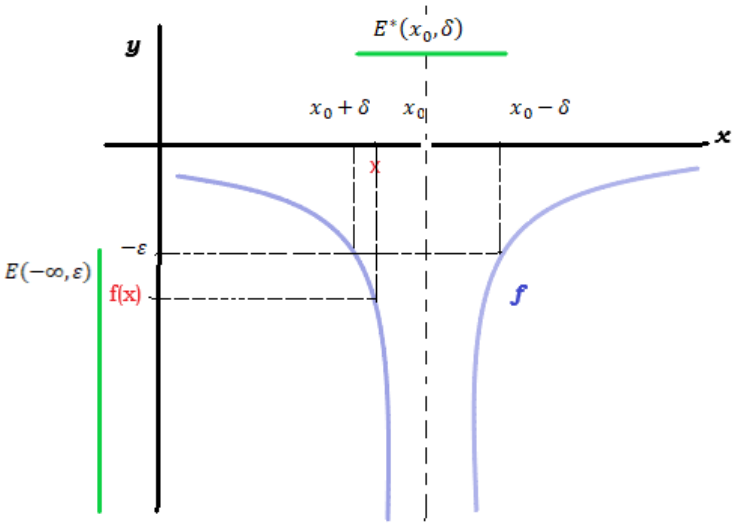
En términos de Entornos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [\,\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (x \in d[f] \;\cap\; E^*(x_0, \delta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \in (+\infty, \varepsilon)]$$

(2) Se dice que f tiene límite $-\infty$ en x_0 y se denota $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si:

$$[\,\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0 / \forall x: (x \in d[f] \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \;\; \Rightarrow \; f(x) < -\varepsilon)$$



<u>En términos de Entornos seria</u>

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow [\,\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (x \in d[f] \;\cap\; E^*(x_0,\delta) \;\; \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) \in (-\infty, \varepsilon)]$$

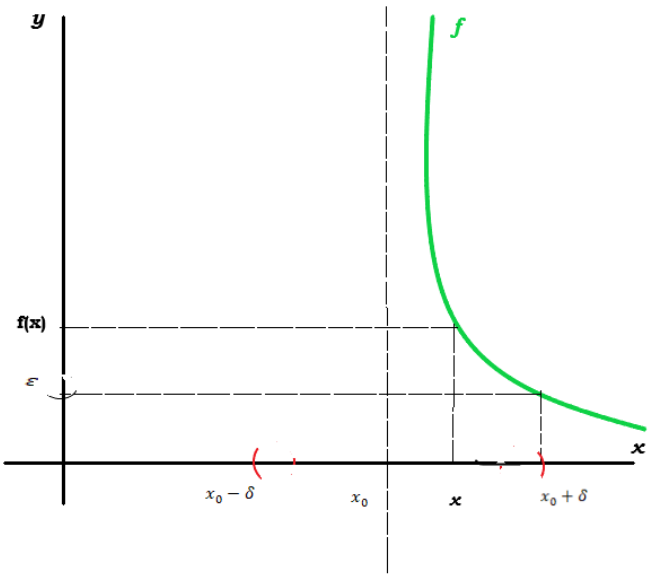
LÍMITE LATERALES INFINITO EN UN PUNTO

Se dice que una función f tiene limite $+\infty$ $(-\infty)$ en x_0 por derecha y se denota

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ (o $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$) si:

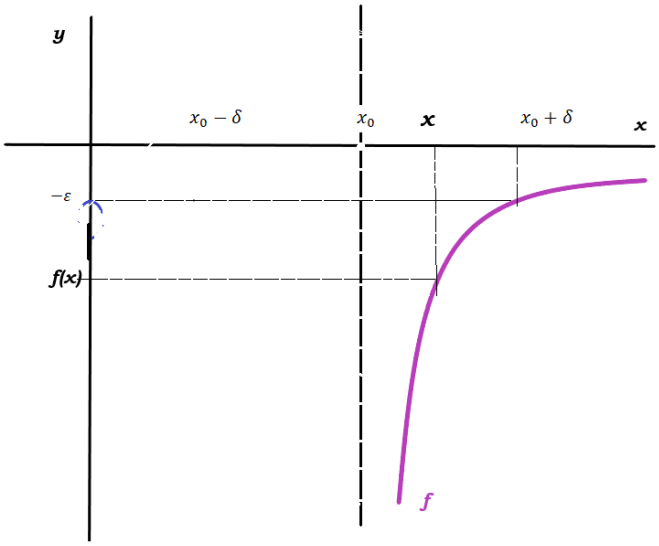
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [\,\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (x \in d[f] \;\wedge x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > \varepsilon]$



- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow [\, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x: (x \in d[f]\ \wedge x_0 < x < x_0 + \delta\ \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < -\varepsilon]$

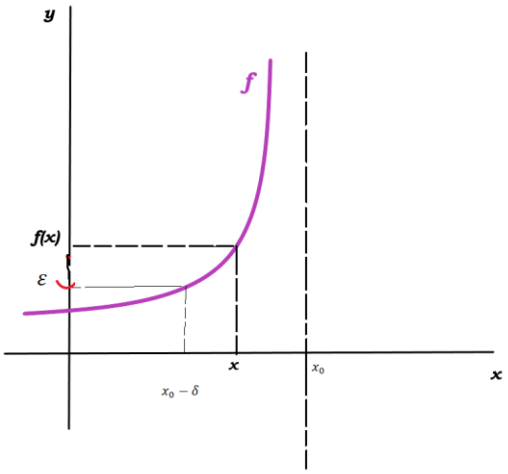


Se dice que una función f tiene limite $+\infty$ $(-\infty)$ en x_0 por izquierda y se denota

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ (o $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$) si:

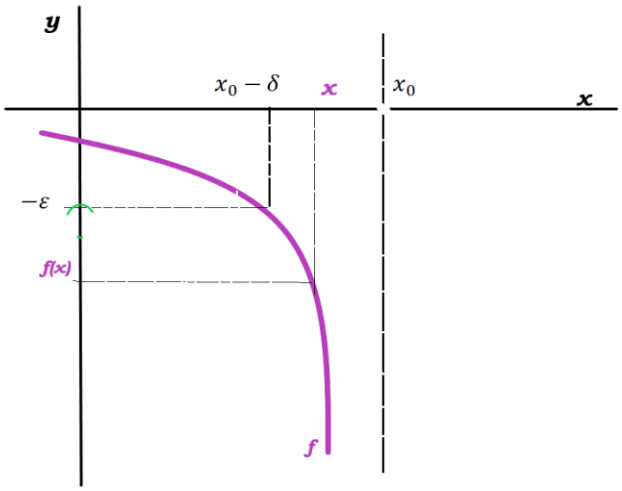
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [\, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x : (x \in d[f] \;\wedge$

$$\wedge\; x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow f(x) > \varepsilon]$$



- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow [\, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall x : (x \in d[f] \;\wedge x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < -\varepsilon]$



<u>Ejemplos</u>

b) Sea la función $\boldsymbol{f_3}$ tal que $\boldsymbol{f_3(x)} = \frac{\mathbf{1}}{|x-2|}$. Para realizar el gráfico de esta función, primero graficamos $g(x) = |x - 2|$.

$$g(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & si\ \ x-2>0 \\ -(x-2) & si\ \ x-2<0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & si\ \ x>2 \\ -x+2 & si\ \ x<2 \end{cases}$$

Nota: No definimos esta función considerando la opción mayor o igual a cero en la primera igualdad, pues no puede ser igual a cero ya que está en el denominador.

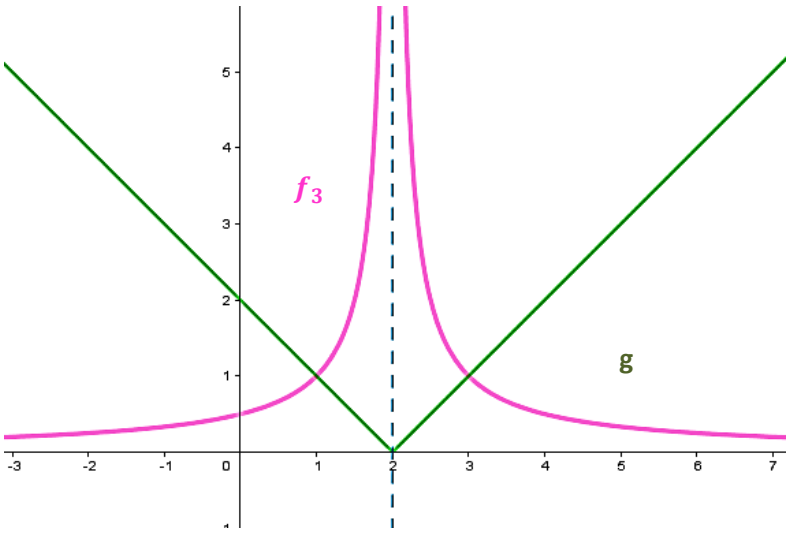
Nota: Al despejar la variable x de cada desigualdad, se obtienen las funciones en cada uno de los intervalos definidos.

Además:

$$\boldsymbol{d[f_3] = R - \{2\}} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{r[f_3] = (0;\ +\infty)}$$

Cuando $x \to 2$ (x tiende a 2, o la variable x toma valores próximos a 2 por derecha y por su izquierda), los valores de $\boldsymbol{f_3}$ (las imágenes de esos x) son grandes y positivos; es decir, tienden a más infinito ($\boldsymbol{f_3}(x) \to +\infty$).

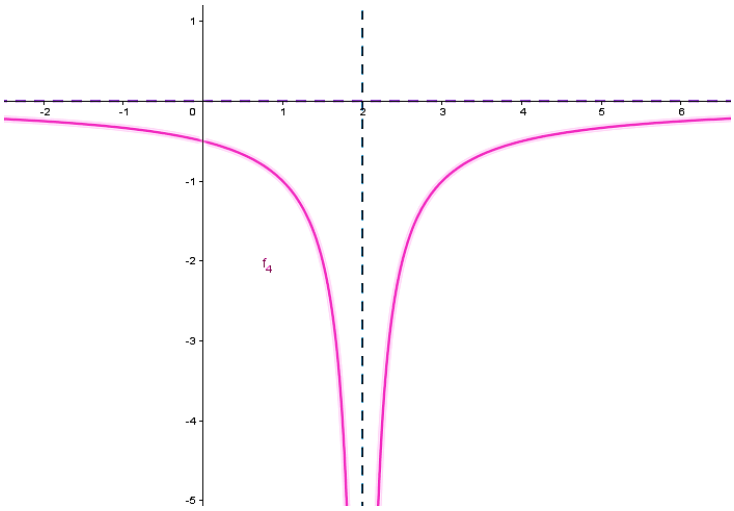
Apreciamos en el siguiente gráfico la función $\boldsymbol{f_3}$, la función **g**, y línea punteada vertical que pasa por 2, indicando que ese valor no se encuentra en el dominio de $\boldsymbol{f_3}$.



c) Sea la función: f4 tal que $f_4(x) = -\frac{1}{|x-2|}$

- $\boldsymbol{d[f_4] = R - \{2\}}$ **y** $\boldsymbol{r[f_4] = (-\infty; 0)}$

- Cuando $x \to 2$ entonces $f_4(x) \to -\infty$

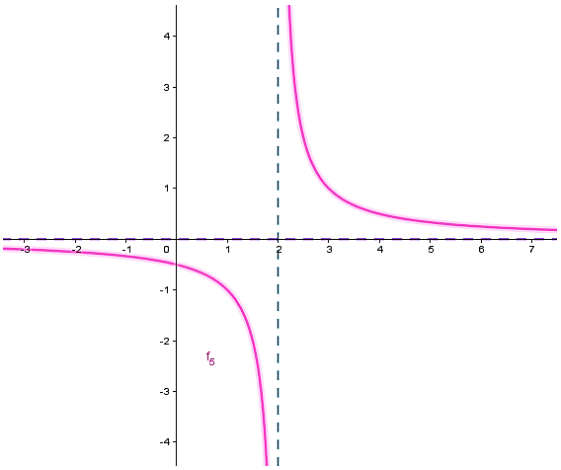


d) Sea la función: f_5 tal que $f_5(x) = \frac{1}{x-2}$

- $\boldsymbol{d[f_5] = R - \{2\}}$ **y** $\boldsymbol{r[f_5] = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)}$

- Cuando $x \to 2^+$ $(2\ por\ derecha)$ entonces $f_5(x) \to +\infty$

- Cuando $x \to 2^-$ $(2\ por\ izquierda)$ entonces $f_5(x) \to -\infty$



Propiedad:

Si existen el $\lim_{x\to x_0^+} f$ y $\lim_{x\to x_0^+} f$ y ambos son iguales a mas infinito (menos infinito) entonces existe también $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$)

ÁLGEBRA DE LÍMITE

Aceptaremos que si c ∈ ℝ, f y g son funciones cuyo dominio es

$d[f] \cap d[g] \neq \emptyset$, con límites finitos L y L' en x_0 entonces:

1-Límite de una constante

$\lim_{x\to x_0} c = c$ para cualquier constante c

El límite de una constante es igual a la constante.

2-Límite de una constante por una función

$$\lim_{x\to x_0}(cf)(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x) = c.L \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

El límite de una constante por una función es igual al producto de la constante por el límite de la función.

3-Límite de la suma

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L + L`$$

El límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites de las mismas.

(Demostración para examen final)

4- Límite de la diferencia

$$\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = L - L`$$

El límite de la diferencia de funciones es igual a la diferencia de los límites de las mismas.

(Demostración para examen final)

5- Límite del producto

$$\lim_{x\to x_0}(f.g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x) = L.L`$$

El límite del producto de funciones es igual al producto de los límites de las mismas.

(Demostración para examen final)

6- Límite del cociente

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{L}{L`} \qquad \text{si } L`\neq 0$$

El límite del cociente de funciones es igual al cociente de los límites de las mismas, siempre que límite de la función del denominador sea distinto de cero.

7- Límite de la potencia

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n=L^n$ donde n es un número racional y existe $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$.

8 - Límite de una raíz

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[n]{L}.$$

El límite de la raíz enésima de una función es igual a la raíz enésima del límite.

Veamos algunos ejemplos

Calcular los siguientes límites:

1- $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+\sqrt{x})$

<u>Resolución</u>

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+\sqrt{x})=\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=3\lim_{x\to 1}x^2+\sqrt{\lim_{x\to 1}x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2+\sqrt{\lim_{x\to 1}x}=3.(1)^2+\sqrt{1}=3.1+1=3+1=4$$

2- $\lim\limits_{x\to 4}[x.(2x+1)]$

Resolución

$$\lim_{x\to 4}[x.(2x+1)] = \lim_{x\to 4} x.\lim_{x\to 4}(2x+1) = \lim_{x\to 4} x.\left(\lim_{x\to 4} 2x + \lim_{x\to 4} 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4} x.\left(2\lim_{x\to 4} x + \lim_{x\to 4} 1\right) = 4.(2.4+1) = 4.(8+1) = 4.9 = 36$$

3- $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x}{-7x+1}$

Resolución

$$\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4}(-7x+1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4}(-7x)+\lim\limits_{x\to 4}1} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} x}{-7\lim\limits_{x\to 4} x+\lim\limits_{x\to 4}1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{(-7.4)+1} = \frac{4}{-28+1} = -\frac{4}{27}$$

4- $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x}{-7x+1}}$

Resolución

$$\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4}(-7x+1)}} = \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4}(-7x)+\lim\limits_{x\to 4}1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to 4} x}{-7\lim\limits_{x\to 4} x+\lim\limits_{x\to 4}1}} = \sqrt[3]{\frac{4}{(-7.4)+1}} = \sqrt[3]{\frac{4}{-28+1}} = \sqrt[3]{-\frac{4}{27}} = -0{,}5$$

También son válidos los siguientes resultados:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{con } e = 2.7182$$

Ejemplos Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{sen(2x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(kx)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{3x}$

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2sen(2x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{sen(2x)}=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{sen(kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ksen(kx)}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{sen(kx)}{kx}=k.1=k$$

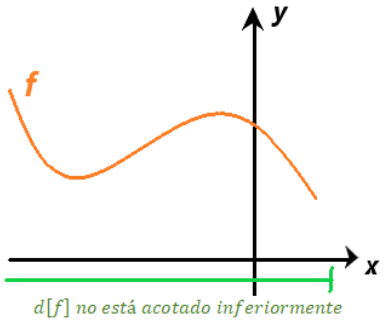
c) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=(1).(1)=1$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{3.4}=e^{12}$$

LÍMITES FINITOS EN MÁS Y MENOS INFINITOS

Sea f una función cuyo dominio no está acotado superiormente (o inferiormente.

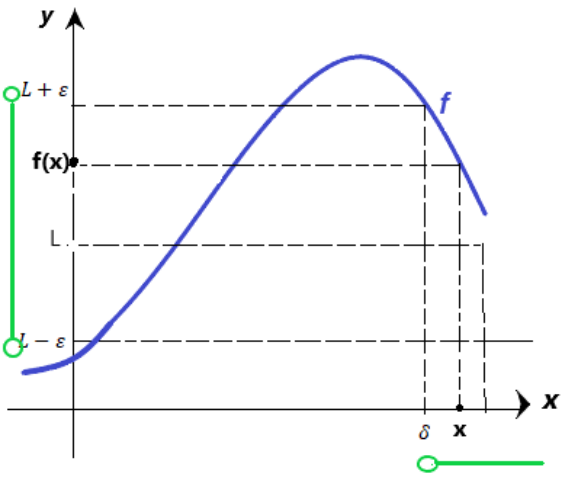
I) II)



I) El dominio no está acotado superiormente

a) Límite Finito en más Infinito

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 / \forall x : x \in d[f] \wedge x > \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x) \in E(L,\varepsilon)}$$

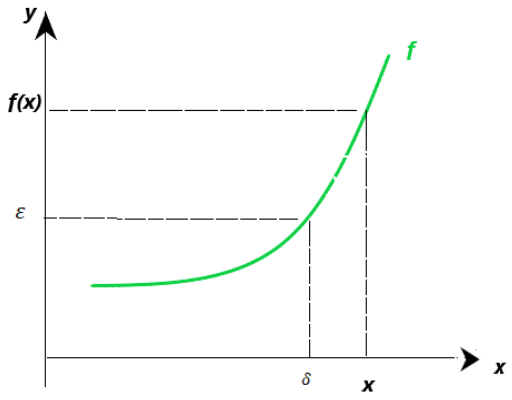


TEOREMA: UNICIDAD DEL LÍMITE FINITO EN MÁS INFINITOS

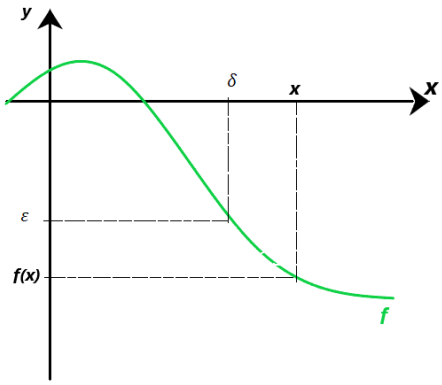
Si los números reales L_1 y L_2 son límites de una misma función f en más infinitos entonces $L_1 = L_2$

b) Límite Infinito en más Infinito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0/\forall x: x\in d[f]\wedge x>\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0/\forall x: x\in d[f]\wedge x>\delta \Rightarrow f(x)<-\varepsilon$$

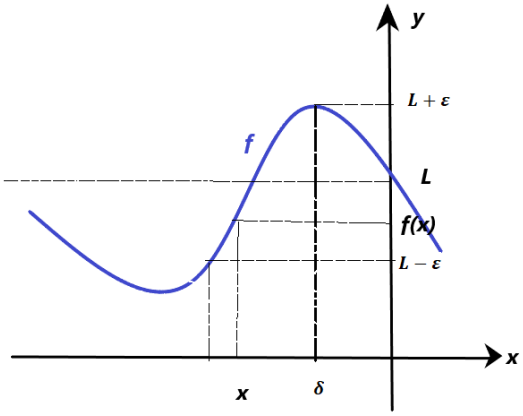


II) Límite Finito en menos Infinito

El dominio no está acotado inferiormente

a) Límite Finito en menos Infinito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0/\forall x: x\in d[f]\wedge x<-\delta \Rightarrow \underbrace{|f(x)-L|<\varepsilon}_{f(x)\in E(L,\varepsilon)}$$



TEOREMA: UNICIDAD DEL LÍMITE FINITO EN MENOS INFINITOS

Si los números reales L_1 y L_2 son límites de una misma función *f* en menos infinitos entonces $L_1 = L_2 = L$ y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f = L$$

b) Límite Infinito en menos Infinito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_\varepsilon > 0 / \forall x : x \in d[f] \wedge x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_\varepsilon > 0 / \forall x : x \in d[f] \wedge x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

ASÍNTOTAS LINEALES A CURVAS PLANAS

Asíntota Vertical

La recta de ecuación x = a es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si y solo si $\lim_a |f| = \infty$

Se dice que **la recta x = a** es una **asíntota vertical** al grafico de f si por lo menos uno de los enunciados siguientes es verdadero:

1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$

2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$

3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty.$

4) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$

<u>Ejemplo 1</u> Sea la función definida por

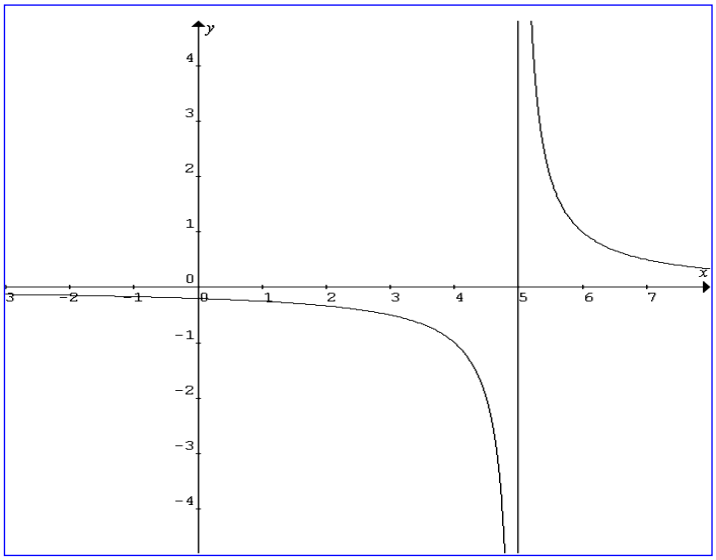
$$f : x \to \frac{x+5}{x^2-25}.$$

Usando la definición de Asíntota Vertical se tiene

$\lim_{x \to 5} \left| \frac{1}{x-5} \right| = \infty.$, la recta de ecuación x=5 es **Asíntota Vertical** a la gráfica de *f*.

Analizando el comportamiento en valores próximo a 5 por derecha e izquierda obtenemos

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5} = +\infty.$$
$$\lim_{x \to 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty.$$



<u>Ejemplo 2</u>

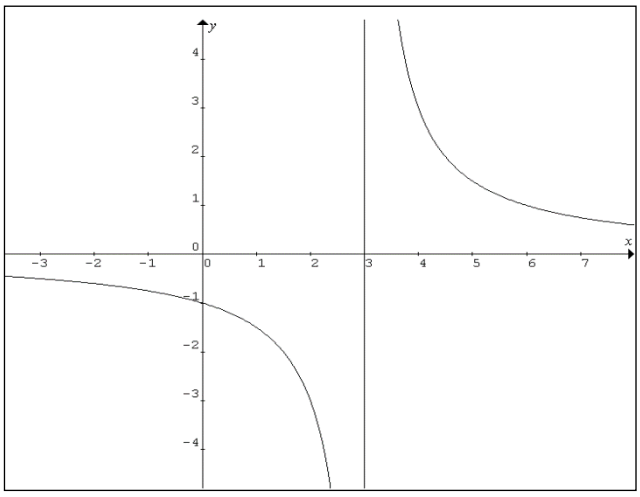
Hallar la asíntota vertical a la gráfica de la función definida por la ecuación $f(x) = \frac{3}{x-3}$

Usando la definición de asíntota vertical se tiene:

$\lim_{x\to 3}\left|\frac{3}{x-3}\right| = \infty$. La recta de ecuación x=3 es **Asíntota Vertical** a la gráfica de *f*.

Analizando el comportamiento a derecha e izquierda del punto excluido del dominio se tienen:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{3}{x-3} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{3}{x-3} = -\infty.$$



Asíntota Horizontal

Se dice que la recta de ecuación y = l es una asíntota horizontal de la gráfica de una función f si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

Ejemplo 1: Sea la función cuya ecuación es $f(x) = \frac{3}{x-2}$

Analizamos las asíntotas

Para ello primero nos fijamos que es una función racional por lo cual el dominio es $d[f] = \mathbb{R} - \{2\}$

Por lo tanto en el valor excluido del dominio va ser asíntota vertical.

Luego haciendo uso de la definición de Asíntota Vertical tenemos $\lim_{x\to 2}\left|\frac{3}{x-2}\right| = \infty$. La recta de ecuación x=2 es **Asíntota vertical**

Si realizamos el comportamiento de la función en valores próximo a 2^+ (por derecha) y a 2^- (por izquierda) tenemos

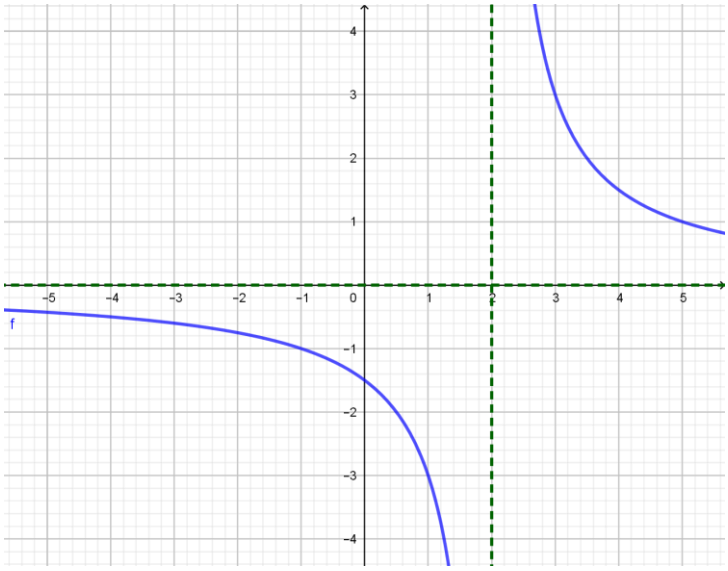
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x-2} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2} = -\infty.$$

Para analizar la asíntota horizontal usamos la definición

$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x-2} = 0$ Luego la recta de ecuación y=0 es **Asíntota Horizontal**

Comportamiento de la asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty^+}\frac{3}{x-2} = 0.$$
$$\lim_{x\to\infty^-}\frac{3}{x-2} = 0.$$



Asíntota Oblicua

Una recta de ecuación y = mx + c, donde $m \neq 0$, se denomina asíntota oblicua a la gráfica de una función f, si

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+c)]=0$$

Ejemplo: Sea f definida por

$f: x \to \dfrac{x^2+2x}{x-2}$. encontrar la asíntota oblicua a la gráfica de f.

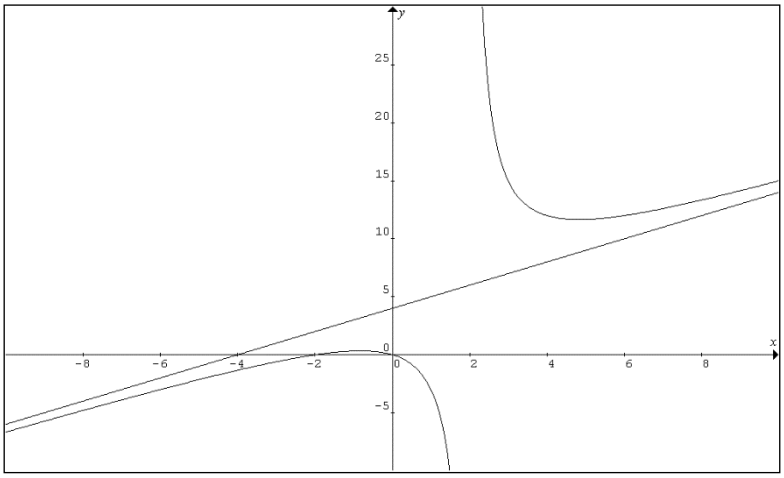
Para encontrar la ecuación de la asíntota oblicua es conveniente efectuar la división de polinomios, resulta por el algoritmo de la división:

$$\frac{x^2+2x}{x-2}=(x+4)+\frac{8}{x+2}.$$

Luego la recta y = x + 4 es **Asíntota Oblicua** al grafico de *f*.

En efecto, haciendo uso de la definición

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(x+4)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\cancel{(x+4)}+\frac{8}{x+2}-\cancel{(x+4)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{8}{x+2}\right]=0.$$



Asíntotas de este tipo aparecen en funciones racionales cuando el grado del numerador es mayor en una unidad que el grado del denominador.

LÍMITES INDETERMINADOS

Cuando tratamos de calcular el límite de algunas operaciones entre funciones solemos encontrarnos con expresiones como: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0 y 1^\infty$

A éstas las denominaremos indeterminadas y **NO** son ningún resultado. En los ejercicios de la práctica veremos en qué forma, se las puede evitar.

Cuando nos encontramos con expresiones de la forma $\infty - \infty, 0.\infty$

Se la lleva a la forma $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Veamos algunos ejemplos

Límite del cociente de funciones polinómicas- Técnica de cancelación

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 - 4x} = \frac{0}{0}$$

La sustitución directa lleva a la forma $\frac{0}{0}$ que no designa ningún número real. Por ello se dice que es una forma indeterminada, porque no nos permite determinar el límite de un modo directo.

¿Cómo se salva la indeterminación?

Solución: Para salvar la indeterminación se puede trabajar así:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 - 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x-3).(x+1)}{\cancel{x}(x+2).(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(-3).1}{2.(-2)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Cálculos auxiliares para determinar las raíces de los polinomios:

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=3$ y $x_2=-1$; $x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2$ $x_2=2$

Límite de una función racional con un irracional en el numerador

Técnica de racionalización

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-2}=\frac{0}{0}$$

La sustitución directa lleva a la forma $\frac{0}{0}$

¿Cómo se salva la indeterminación?

<u>Solución:</u> Para salvar la indeterminación se puede reescribir la función racionalizando el numerador

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2}).(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2).(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-2).(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-2}{x-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

<u>Otro caso</u>

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$